TEORÍA DE CONJUNTOS

Podemos definir intuitivamente un conjunto como una colección de elementos, objetos o individuos que tienen una propiedad o característica en común, por ejemplo si queremos reunir a todos los estudiantes de Séptimo del Colegio Cafam que cumplen años en el mes de Agosto, obtendríamos un conjunto más pequeño o igual al inicial tomado del conjunto más grande el cual llamaremos conjunto de referencia o conjunto universal, los conjuntos se nombran usando letras mayúsculas, por ejemplo el conjunto anterior lo podemos nombrar por A, el conjunto de Referencia lo notaremos con el símbolo $\mathcal{R}$. Los conjuntos pueden ser finitos o infinitos, nuestro primer ejemplo nos lleva a un conjunto finito, a la fecha hemos trabajado con conjuntos infinitos, como el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, enteros $\mathbb{Z}$, racionales $\mathbb{Q}$, irracionales $\mathbb{I}$, reales $\mathbb{R}$.

NOTACIÓN Y SIMBOLOGIA

Dado un conjunto de referencia, $\mathcal{R}$, si deseamos seleccionar los elementos que cumplen cierta propiedad P, y a estos elementos los designamos como el conjunto A, si un elemento a cumple la propiedad o característica P, se dice que este elemento a pertenece a A, lo cual se simboliza como $a \in A$, la representación del conjunto se puede hacer como $A = \{a \in \mathcal{R} \mid a\ satisface\ P\}$, esta forma de escribir los conjuntos se conoce como notación por comprensión y se lee: "El conjunto A está formado por los elementos a que pertenecen a $\mathcal{R}$, tales que a satisface la propiedad P"

CONJUNTO POR COMPRENSIÓN

Por ejemplo si tenemos como conjunto de Referencia el conjunto $\mathbb{N}$, y deseamos formar el conjunto B de aquellos naturales menores que 20 y que son primos, entonces tenemos

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n\ es\ primo\ y\ n < 20\}$$

CONJUNTO POR EXTENSIÓN

El conjunto del ejemplo anterior también se puede escribir por extensión, esto se hace escribiendo todos los elementos que pertenecen al conjunto separados por comas:

$$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

Esta forma de escritura es adecuada cuando el conjunto es finito y no tiene muchos elementos

CARDINALIDAD DE UN CONJUNTO

Al número de elementos de un conjunto lo llamaremos cardinal y se representa colocando la letra del conjunto encerrada entre dos barras verticales, para nuestro ejemplo anterior, como hay 8 números primos menores que 20, entonces el número de elementos de B es 8, es decir el cardinal de B es 8, lo cual se simboliza como $|B| = 8$.

CONJUNTO VACÍO

Se asume la existencia de un conjunto que no tiene elementos, a este conjunto lo llamaremos conjunto vacío, y se denota con el símbolo $\emptyset$, en teoría de conjuntos es de vital importancia ya que en algunas oportunidades este conjunto representa la imposibilidad de que algo ocurra en una operación o propiedad, por ejemplo existen ecuaciones en matemáticas las cuales no tienen solución, entonces se dice que el conjunto solución para ellas es el conjunto vacío, por ejemplo si queremos formar el conjunto A de aquellos estudiantes del colegio Cafam que cursan grado séptimo y que simultáneamente cursan grado octavo, encontramos que no existe un solo estudiante que este cursando al mismo tiempo séptimo y octavo, decimos entonces que $A = \emptyset$, y además $|A| = |\emptyset| = 0$, es el conjunto que no tiene elementos.

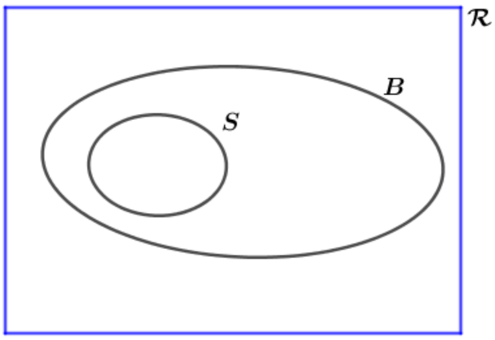
DIAGRAMAS DE VENN, RELACIONES Y OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

IGUALDAD

Igualdad entre conjuntos, dados dos conjuntos A y B estos son iguales si se cumple que todos los elementos de A están en B y viceversa, todos los elementos de B están en A, esto se simboliza por $A = B$.

CONTENENCIA

Contenencia y subconjuntos, dado un conjunto siempre es posible obtener otro conjunto, por ejemplo si tomamos el conjunto de los estudiantes de básica del colegio Cafam, y a este conjunto lo llamamos B, sobre este conjunto podemos formar otro conjunto con todos los estudiantes de grado Séptimo y a este conjunto le llamamos S, cada elemento de S es también elemento de B, cuando esto ocurre se dice que S está contenido en B y esto se denota por $S \subseteq B$, la rayita de abajo indica que podría ser una igualdad entre conjuntos, si uno está contenido en el otro pero no son iguales entonces se utiliza $S \subset B$, este símbolo se utiliza para contenencia estricta, si un conjunto está contenido en otro se dice que el primero es subconjunto del segundo, para nuestro ejemplo anterior S es subconjunto de B. Formalmente se dice que $S \subseteq B$, si y solo si para todo $a \in S$, entonces $a \in B$.



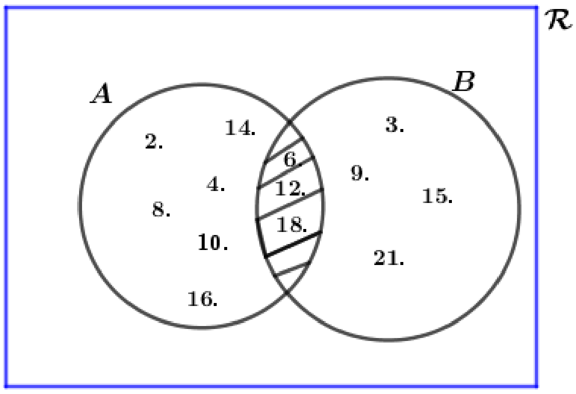
La contenencia se puede representar mediante diagramas de Venn

En el diagrama de Venn, los conjuntos se dibujan en forma ovalada o circular, El rectángulo es el conjunto de referencia que para nuestro ejemplo corresponde al conjunto de todos los estudiantes del colegio Cafam.

Nota: El conjunto vacío está contenido en todo conjunto, es decir dado A siempre se tiene que $\emptyset \subseteq A$.

INTERSECCIÓN

Intersección: Dados dos conjuntos A y B, La intersección de dos conjuntos es un nuevo conjunto el cual está formado por los elementos que están simultáneamente en ambos conjuntos, y se simboliza por $A \cap B$, por ejemplo si $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,18\}$ y $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$, la intersección es: $A \cap B = \{6, 12, 18\}$, se puede apreciar que : $|A \cap B| = 3$

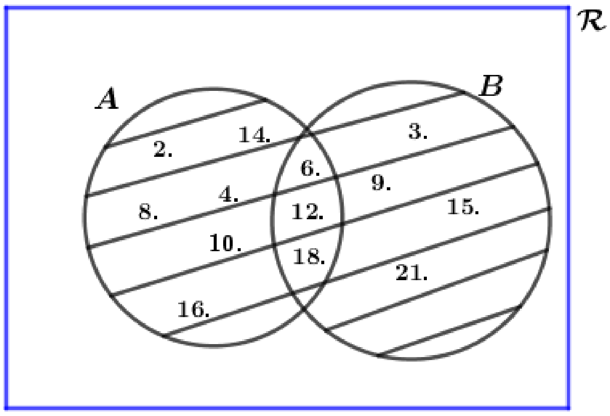


La intersección de conjuntos se representa mediante diagramas de Venn sombreando o rayando la parte central, de manera formal se puede definir la intersección como:

$a \in A \cap B$, Si y solo si, $a \in A$ y $a \in B$

UNIÓN

Unión: La unión de conjuntos: dados dos conjuntos, la unión de estos es un nuevo conjunto el cual está conformado por los elementos de ambos conjuntos dados los conjuntos A y B, su unión se simboliza por $A \cup B$, y se define como; $a \in A \cup B$, si y solo si, $a \in A$ o $a \in B$. Por ejemplo si



$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,18\}$ y

$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$,

La unión es: $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16,18, 21\}$, los elementos que se repiten, los que están en la intersección se escriben solo una vez, se puede apreciar que : $|A \cup B| = 13$,

Fórmula para el cardinal de la unión; cuando tenemos que encontrar el número de elementos de la unión de dos conjuntos finitos, podemos aplicar una formula dado el caso en que se conozcan los cardinales de los conjuntos individuales y de su intersección

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Para nuestro ejemplo anterior tenemos que $|A| = 9, |B| = 7, |A \cap B| = 3,$ por lo tanto

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B| = 9 + 7 - 3 = 13$$

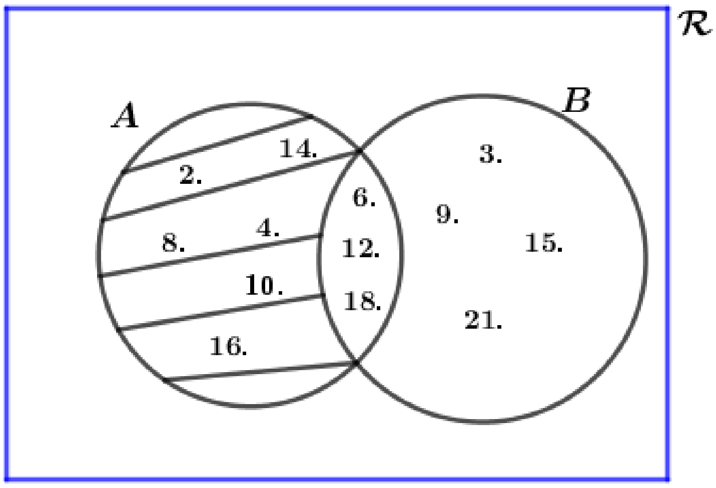
Para el caso de tres conjuntos podemos generalizar esta formula haciendo uso de una técnica de conteo llamada principio de inclusión-exclusión:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| + |A \cap B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$

En estas ecuaciones se puede despejar el cardinal que se desee según las necesidades del problema, por ejemplo para la intersección de dos conjuntos su cardinal es:

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$$

DIFERENCIA



Diferencia entre conjuntos, la diferencia entre dos conjuntos es un nuevo conjunto, formado por los elementos que están en el primer conjunto pero no están en el segundo, esto se simboliza $A \setminus B$, se lee A menos B, por ejemplo si $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,18\}$ y $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$,

$$A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$$

$$B \setminus A = \{3, 9, 15, 21\}$$

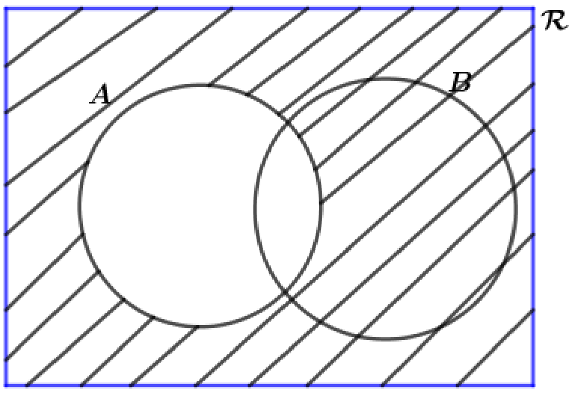
Note que $|A \setminus B| = 6$

Una fórmula para el cardinal de la diferencia es $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$, tenga en cuenta que para nuestro ejemplo anterior se tiene que $|A| = 9$, y $|A \cap B| = 3$, por ende:

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

$$|A \setminus B| = 9 - 3 = 6$$

COMPLEMENTO



Dado un conjunto A, y su conjunto de referencia $\mathcal{R}$, el complemento es el conjunto formado por elementos que están en $\mathcal{R}$ pero no están en A, esto se simboliza por A^c, es decir $A^c = \mathcal{R} \setminus A$, por ejemplo si $\mathcal{R} = \{-3, 5, -8, 4, -2, -2019\}$, y $A = \{-3, -8, 4, -2\}$ entonces $A^c = \{5, -2019\}$

Note que $|A^c| = |\mathcal{R}| - |A|$

$$|A^c| = 6 - 4 = 2$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Se preguntó a 50 padres de alumnos del Colegio Cafam, sobre los deportes que practicaban, obteniéndose los siguientes resultados: 20 practican sólo fútbol, 12 practican fútbol y natación y 10 no practican ninguno de estos deportes. Con estos datos averigua el número de padres que practican natación, el número de ellos que sólo practican natación y el de los que practican alguno de dichos deportes.

   Solución: Existen dos métodos para resolver este tipo de problemas, el primero que estudiaremos es aplicando las fórmulas de cardinales vistas anteriormente, y el segundo es por medio de Diagramas de Venn

   Método 1
   Sea $\mathcal{R} =$: Total de padres encuestados
   Sea $F =$: conjunto de padres que Juegan Futbol

Sea N =: conjunto de padres que practican Natación
Datos conocidos:
$|\mathcal{R}| = 50$
$|F \setminus N| = 20$
$|F \cap N| = 12$
$|(F \cup N)^c| = 10$

Datos por encontrar:
$|N| =?$
$|N \setminus F| =?$
$|F \cup N| =?$

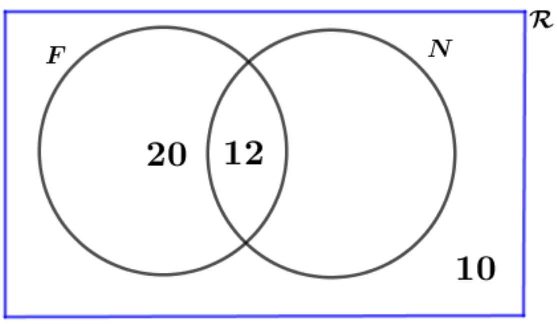
Como $|(F \cup N)^c| = 10$, entonces
$|(F \cup N)^c| = |\mathcal{R}| - |F \cup N| = 10$, Entonces $50 - |F \cup N| = 10 \Longrightarrow |F \cup N| = 40$

Como $|F \setminus N| = 20$
$|F \setminus N| = |F| - |F \cap N| = 20$, Entonces $|F| - 12 = 20 \Longrightarrow |F| = 32$
Dado que
$|F \cup N| = |F| + |N| - |F \cap N|$, entonces $40 = 32 + |N| - 12 \Longrightarrow |N| = 20$

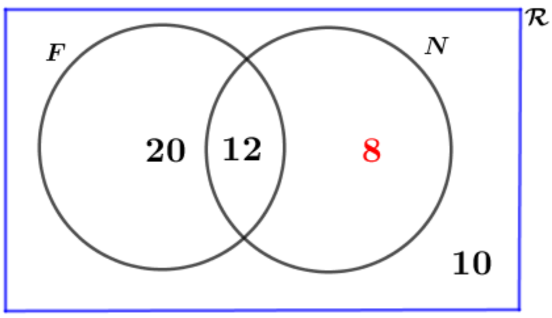
Ya que $|N \setminus F| = |N| - |F \cap N| = 20 - 12 = 8$

Por lo tanto los padres que practican natación son 20, 8 practican solo natación, y quienes practican futbol o natación son 40.

Método 2



Ubicamos los datos conocidos en el diagrama de Venn, en los espacios escribimos la cantidad de elementos de cada conjunto.



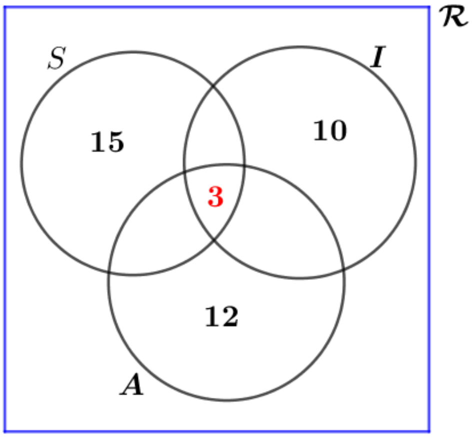
Como $|\mathcal{R}| = 50$ y $20 + 12 + 10 = 42$, entonces el espacio que falta por llenar debe ser 8, por lo tanto tenemos que
$|N \setminus F| = 8$

$|N| = 12 + 8 = 20$

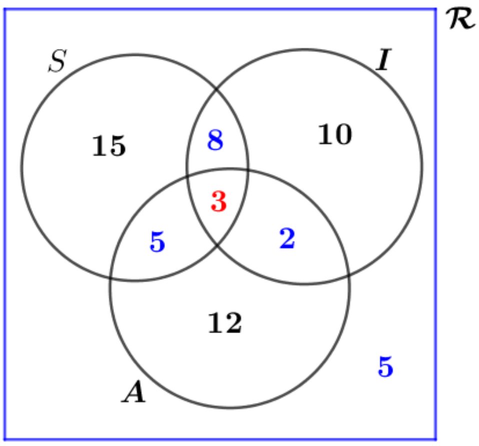
$|F \cup N| = 20 + 12 + 8 = 40$

2. De un total de 60 alumnos de grado Séptimo: 15 estudian solamente ruso, 11 estudian ruso e inglés, 12 estudian sólo alemán; 8 estudian ruso y alemán; 10 estudian sólo inglés; 5 estudian inglés y alemán; y 3 los tres idiomas. Determina: a) ¿Cuántos no estudian ningún idioma? b) ¿Cuántos estudian alemán? c) ¿Cuántos estudian sólo alemán e inglés? d) ¿Cuántos estudian ruso?

   Solución: Este problema se puede resolver usando la fórmula de cardinales para tres conjuntos vista con anterioridad, pero dada la eficacia de los diagramas de Venn usaremos este último:
   Sea $\mathcal{R}$ =: Total de estudiantes encuestados
   Sea S =: conjunto de estudiantes que estudian ruso
   Sea I =: conjunto de estudiantes que estudian Ingles
   Sea A =: conjunto de estudiantes que estudian Aleman



Ubicamos los datos conocidos, se sugiere ubicar primero aquellos datos que solamente pueden estar en una única región, como es el caso de $|S \cap I \cap A| = 3$, $15, 10$ y 12, y después tomamos aquellos datos que comparten dos regiones o más, por ejemplo el dato $|S \cap A| = 8$, hace parte de la intersección de los conjuntos S y A, en esta intersección hay dos regiones y en una de ellas ya está el dato 3, por ende en la otra región debe estar el dato 5 para que nos dé un total de 8, de esta forma se llenan las demás regiones:



Como $|S \cap I| = 11$, entonces faltaría un 8 para que $8 + 3 = 11$, Como $|A \cap I| = 5$, entonces faltaría un 2 para que $2 + 3 = 5$, Como $|\mathcal{R}| = 60$, y $15 + 5 + 8 + 3 + 12 + 2 + 10 = 55$, entonces va un 5 en la región que esta afuera de los 3 conjuntos. Po lo tanto las respuestas son:

- 5 no estudian ningún idioma $|(S \cup I \cup A)^c| = 5$,
- $|A| = 12 + 5 + 3 + 2 = 22$, 22 estudian alemán.
- $|(A \cap I) \setminus S| = |A \cap I| - |A \cap I \cap S| = 5 - 3 = 2$, 2 estudian solamente Ingles y Aleman.
- $|S| = 15 + 8 + 3 + 5 = 31$, 31 estudian ruso

PROBABILIDAD LAPLACIANA O CLASICA

Un concepto muy importante debido a su aplicación en la vida diaria es la probabilidad, en la cotidianidad existen fenómenos o experimentos que tienen un comportamiento aleatorio estos experimentos se caracterizan porque no se pude predecir a priori con plena seguridad el resultado de dicho experimento, simplemente se puede en algunos casos dar una medida a la posible ocurrencia de un resultado especifico, esta medida de posibilidad se conoce como la probabilidad.

DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

La definición formal de probabilidad requiere un conocimiento más profundo de propiedades y relaciones matemáticas, en esta guía no abordaremos estos detalles, más bien daremos una definición acorde a los conocimientos adquiridos a la fecha.

Si se realiza un experimento aleatorio, en el cual todos sus resultados tienen la misma posibilidad de ocurrencia, el conjunto de todos los posibles resultados de dicho experimento lo llamaremos Omega y se simboliza con la letra Ω, este conjunto se conoce como espacio muestral, y será nuestro conjunto de referencia en el tema de probabilidades, dado un subconjunto A de Ω, al que llamaremos "evento" $A \subseteq \Omega$, la probabilidad de que ocurra el evento A, $\mathcal{P}(A)$ se define como el cociente entre el número de elementos del conjunto A y el número de elementos de Ω, es decir:

$$\mathcal{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

El matemático Pierre-Simon Laplace fue el primero en dar esta definición de medida de probabilidad, que se puede también interpretar como "número de casos favorables" sobre "número de casos posibles"

$$\mathcal{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{Numero\ de\ casos\ favorables}{Numero\ total\ de\ casos\ posibles}$$

Propiedades de la probabilidad. Las propiedades que se darán a continuación son deducidas directamente de las formulas sobre cardinalidad de conjuntos dadas anteriormente:

- $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathcal{P}(\Omega) = 1$
- $\mathcal{P}(A^c) = 1 - \mathcal{P}(A)$
- $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)$
- $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(A \cap B)$
- $0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

1. Dado el experimento aleatorio de lanzar un dado, se desea calcular la probabilidad de que el resultado sea un número primo.

   Solución: Tenemos que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\mathrm{A} = \{2, 3, 5\}$, por lo tanto:

   $$\mathcal{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

2. Si tomamos el ejemplo 2 de los tres conjuntos, y deseamos calcular la probabilidad de que al seleccionar un estudiante al azar, este no esté estudiando ninguno de los tres idiomas, tenemos que:
   $\Omega =:$ Conjunto de estudiantes encuestados, entonces $|\Omega| = 60$.
   $\mathrm{A} =:$ Conjunto de estudiantes que no estudian ninguno de los tres idiomas, entonces $|\mathrm{A}| = 5$. Por lo tanto tenemos:

   $$\mathcal{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \approx 0.833 = 83.3\%$$